Matematica finanziaria: prova di esame del 27 giugno 2011

(1) Si vuole comprare una macchina, e per questo si prendono in prestito 20 000 euro. Si restituiscono tramite un piano di ammortamento americano, appoggiandosi a un fondo che rende il 3% mensile. Scrivere il piano di ammortamento del prestito, tenendo presente che la rateizzazione è mensile posticipata, la durata del prestito è 4 mesi, e il tasso di remunerazione del prestito è il 2% mensile.

Svolgimento. La quota capitale C depositata sul fondo deve fornire 20 000 euro tra 4 mesi:

$$\begin{array}{ccccc} & C & C & C & C \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}$$

e deve quindi soddisfare l'equazione

$$1.03^3 C + 1.03^2 C + 1.03 C + C = 20\,000 \ ,$$

che ha come risultato

$$C = \frac{20\,000}{1.03^3 + 1.03^2 + 1.03 + 1} = \frac{20\,000 \cdot 0.03}{1.03^4 - 1} = \frac{600}{1.03^4 - 1} = 4\,780.54 \ .$$

Poiché il debito residuo non diminuisce (la quota capitale viene versata nel fondo, e non data al creditore), la quota interesse I è costante: $I = 20\,000 \cdot 0.02 = 400$.

Il piano di ammortamento è quindi

anno	QC	QI	R	DR
1	4 780.54	400	5 180.54	20 000
2	4 780.54	400	5 180.54	20 000
3	4 780.54	400	5 180.54	20 000
4	4 780.54	400	5 180.54	0

□

Errori più comuni. "Siccome nel piano di ammortamento americano sia la quota capitale che la quota interesse sono costanti, abbiamo $QI = 400$ e $QC = 20\,000/4 = 5000$".

(2) Calcolare il montante che si ottiene dopo 2 anni investendo 1 000 euro a un tasso nominale semestrale del 5% pagabile due volte a semestre. Assumere un reinvestimento delle cedole in regime di interesse semplice al tasso mensile del 2%.

Svolgimento. La cedola nominale è 50 euro pagata 2 volte a semestre, quindi la cedola effettiva C è pari a 25 euro ogni trimestre. L'operazione finanziaria è quindi

$$\begin{array}{cccccc} & & & & & 1\,000 \\ -1\,000 & 25 & 25 & \cdots & 25 & 25 \\ \bullet & \bullet & \bullet & & \bullet & \bullet \\ 0 & 3 & 6 & \cdots & 21 & 24 \end{array} \quad t = \text{mesi}$$

Il reinvestimento delle cedole nel regime assegnato fornisce al tempo 2 anni un montante pari a

$$25(1 + 0.02 \cdot 21) + 25(1 + 0.02 \cdot 18) + \cdots + 25(1 + 0.02 \cdot 3) + 25 = 25 \cdot 8 + 25 \cdot 0.02 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 7 = 242$$

per cui il montante finale è 1 242. □

Errori più comuni. (a) "Il reinvestimento è in regime lineare, e ho un tasso mensile del 2%. Converto il tasso da mensile a trimestrale: $i_{\text{trimestrale}} = (1 + 0.02)^3 - 1 \ldots$": in regime lineare, la conversione del tasso da mensile a trimestrale è $i_{\text{trimestrale}} = 3 \cdot 0.02$. (b) "investo in regime lineare $r(t) = 1 + it$, e quindi per le cedole ottengo $25(1 + 0.02 \cdot 21) + \cdots = 25(21.42) + \ldots$": si fa *prima* la moltiplicazione e *poi* la somma, quindi $1 + it \neq (1 + i)t$.

(3) Sapendo che il tasso ambiente è il 25% annuo, usare il criterio del TIR per dire quali tra le seguenti operazioni finanziarie *non* sono convenienti.

(a) $\{(-250, \text{oggi}), (50, \text{tra 1 anno}), (400, \text{tra 3 anni})\}$.

(b) $\{(-400, \text{oggi}), (650, \text{tra 2 anni})\}$.

(c) $\{(-320, \text{oggi}), (150, \text{tra 2 anni}), (400, \text{tra 2 anni e mezzo})\}$.

Svolgimento. Per trovare il TIR delle 3 operazioni finanziarie date dovremmo risolvere le 3 equazioni

(a) $f_1(v) = -250 + 50v + 400v^3 = 0$.

(b) $f_2(v) = -400 + 650v^2 = 0$.

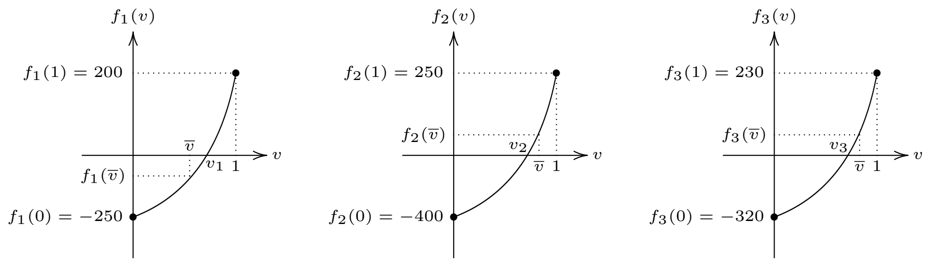
(c) $f_3(v) = -320 + 150v^2 + 400v^{2.5} = 0$.

Il testo però non chiede di calcolare il TIR di ciascuna operazione finanziaria, bensì di dire quali di esse rendono meno del 25% annuo. A tal fine, basta sostituire il fattore di sconto corrispondente al 25% in f_1, f_2 e f_3, e osservare che f_1, f_2 e f_3 sono crescenti in $[0, 1]$.

Il fattore di sconto è $\overline{v} = 1/1.25$, e la sostituzione fornisce

$$f_1(\overline{v}) < 0 \ , \qquad f_2(\overline{v}) > 0 \ , \qquad f_3(\overline{v}) > 0 \ .$$

Dall'osservazione dei grafici di f_1, f_2 e f_3, dette v_1, v_2 e v_3 le rispettive intersezioni con l'asse v, vediamo che $v_1 > \overline{v}$ e $v_2, v_3 < \overline{v}$.



(A) Grafico di f_1 (B) Grafico di f_2 (C) Grafico di f_3

Essendo la funzione $i(v) = 1/v - 1$ decrescente, abbiamo

$$i_1 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{v_1} - 1 < \frac{1}{\overline{v}} - 1 = 0.25 \ , \qquad i_2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{v_2} - 1, i_3 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{v_3} - 1 > 0.25 \ .$$

Quindi l'operazione finanziaria (a) rende meno del tasso ambiente, e risulta pertanto non conveniente. □

Errori più comuni. Calcolo del REA al 25% al posto del TIR.

(4) Si consideri un finanziamento di 3 000 euro da restituire con 3 rate mensili posticipate da 1 050 euro ciascuna, spese accessorie escluse. Calcolare il TAN del finanziamento.

Svolgimento. È il solito esercizio sul tasso interno di rendimento. L'equazione da risolvere è

$$-3000 + 1050v + 1050v^2 + 1050v^3 = 0 \ ,$$

che semplificata diviene

$$-20 + 7v + 7v^2 + 7v^3 = 0 \ .$$

Il metodo della bisezione fornisce come risultato al meglio di 2 cifre decimali

$$0.97 < v_{\text{mensile}} < 0.98 \Longrightarrow \frac{1}{0.98^{12}} - 1 < i_{\text{annuale}} < \frac{1}{0.97^{12}} - 1 \ ,$$

che fornisce per il TAN l'approssimazione $0.27 < \text{TAN} < 0.44$. □

Errori più comuni. (a) "uso il metodo della bisezione, quindi provo un valore a caso: $f(0.95) = 2.85$. Siccome 2.85 è circa 0, abbiamo $v = 0.95\ldots$": questo non è il metodo della bisezione, è tentare a caso, ed è un metodo che non funziona perché la soluzione vera può essere molto diversa da quella trovata! (b) "devo risolvere l'equazione $7v(v^2 + v + 1) = 20$. Abbiamo quindi $7v = 20$ oppure $v^2 + v + 1 = 20\ldots$": questo "metodo" vale soltanto con 0 al posto di 20!

(5) Si consideri il regime finanziario in una variabile $r(t) = e^{0.1t^2}$, con t che misura gli anni. Si dica se $r(t)$ è scindibile e si calcoli la forza d'interesse $\delta(t)$.

Svolgimento. Il regime dato non è scindibile perché non è esponenziale. La forza d'interesse è

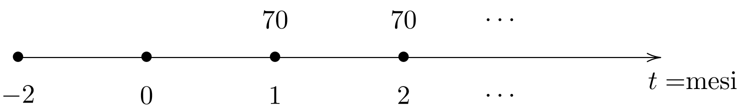
$$\delta(t) = (\ln e^{0.1t^2})' = (0.1t^2)' = 0.2t \ .$$

□

Errori più comuni. "$r(t)$ è esponenziale, quindi è scindibile": le funzioni esponenziali sono della forma $r(t) = e^{\delta t}$, non $e^{\delta t^2}$.

(6) Calcolare il valore attuale di una rendita perpetua costante posticipata, di rata 70, periodica, di periodo 1 mese, differita di 2 mesi, al tasso di valutazione del 4% mensile.

Svolgimento. Il grafico della rendita è



Con riferimento al grafico, il valore attuale richiesto è il valore in -2, che è il valore in 0 scontato di 2 mesi, cioè

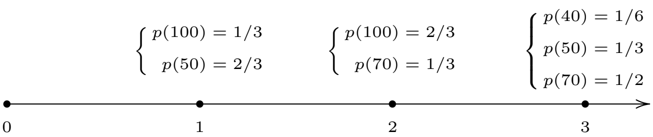
$$V = \frac{70}{0.04 \cdot 1.04^2} \ .$$

□

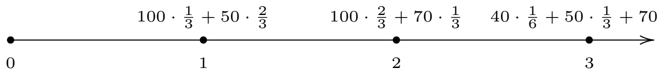
Errori più comuni. (a) Differimento dimenticato. (b) "valore attuale della rendita = R/i, con $i = (1 + 0.04)^2 - 1 \dots$": errore che non sono riuscito a capire.

(7) Solo corso da 4 crediti Si consideri un'operazione finanziaria aleatoria così composta: al tempo 1 si guadagna 100 con probabilità 1/3 e 50 con probabilità 2/3, al tempo 2 si guadagna 100 con probabilità 2/3 e 70 con probabilità 1/3, al tempo 3 si guadagna 40 con probabilità 1/6, 50 con probabilità 1/3 e 70 con probabilità 1/2. Utilizzando il criterio del valor medio, calcolare il valore attuale al tasso di valutazione del 3% periodale.

Svolgimento. L'operazione finanziaria è



e il criterio del valor medio la trasforma in



.

Detto $v \stackrel{\text{def}}{=} 1/1.03$ il fattore di sconto, il valore attuale è

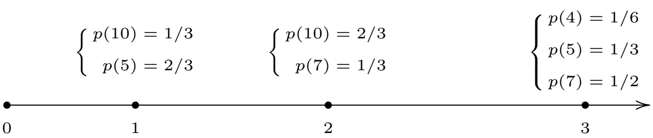
$$V = \frac{200}{3} v + \frac{270}{3} v^2 + \frac{350}{6} v^3 = 202.942 \ .$$

□

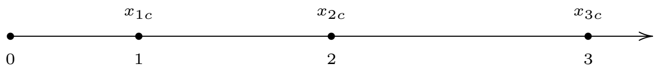
Errori più comuni. Calcolo del valore attuale in regime lineare, invece che in regime esponenziale.

(8) Solo corso da 5 crediti Si consideri un'operazione finanziaria aleatoria così composta: al tempo 1 si guadagna 10 con probabilità 1/3 e 5 con probabilità 2/3, al tempo 2 si guadagna 10 con probabilità 2/3 e 7 con probabilità 1/3, al tempo 3 si guadagna 4 con probabilità 1/6, 5 con probabilità 1/3 e 7 con probabilità 1/2. Utilizzando il criterio dell'utilità attesa, una funzione di utilità $u(x) = -e^{-x}$ e un tasso di valutazione del 3% periodale, calcolare l'equivalente certo al tempo 0.

Svolgimento. L'operazione finanziaria è



e il criterio dell'utilità attesa la trasforma in



,

dove x_{1c}, x_{2c} e x_{3c} sono gli equivalenti certi ai tempi 1, 2 e 3 rispettivamente. Nel dettaglio, abbiamo

$$
\begin{aligned}
u(x_{1c}) &= u(10) \cdot \frac{1}{3} + u(5) \cdot \frac{2}{3} = -0.0045071 \ , \\
u(x_{2c}) &= u(10) \cdot \frac{2}{3} + u(7) \cdot \frac{1}{3} = -0.000334227 \ , \\
u(x_{3c}) &= u(4) \cdot \frac{1}{6} + u(5) \cdot \frac{1}{3} + u(7) \cdot \frac{1}{2} = -0.00575453 \ ,
\end{aligned}
$$

da cui

$$
\begin{aligned}
x_{1c} &= -\ln(0.0045071) = 5.4021 \ , \\
x_{2c} &= -\ln(0.000334227) = 8.00369 \ , \\
x_{3c} &= -\ln(0.00575453) = 5.15777 \ .
\end{aligned}
$$

Detto $v \stackrel{\text{def}}{=} 1/1.03$ il fattore di sconto, l'equivalente certo al tempo 0 è

$$V = 5.4021v + 8.00369v^2 + 5.15777v^3 = 17.5091 \ .$$

$\square$

Errori più comuni. Sconto delle utilità invece che degli equivalenti certi.